- DIVISION DES ENTIERS -

DIVISIBILITE DANS Z

- b divise a lorsqu'il existe un entier k tel que a = kb
  On dit que a est multiple de b ; b est diviseur de a.

- Pour tout entier relatif (Z) a, b, c on a :
  - 1, a, -1 et –a qui divisent a
  - a | b et b | a $\Leftrightarrow$ a = b ou a = -b
  - a | b et b | c $\Rightarrow$ a | c

- Combinaisons linéaires avec a, b, α et $\beta \in$ Z :
  - α a + β b est une combinaison linéaire de a et b
  - d | a et d | b $\Rightarrow$ d | α a + β b

- L' ensemble des diviseurs d'un entier naturel (N) a se note Da = {…, …, …} et on a :
  - 1 $\in$ Da et a $\in$ Da
  - a | b $\Rightarrow$ Da $\subset$ Db
  - Da = Db $\Leftrightarrow$ a = b
  - d | a et d | b $\Rightarrow \left| \begin{array}{l} Dd \subset D(a+b) \\ Dd \subset D|a-b| \\ Dd \subset D|\alpha a + \beta b| \end{array} \right.$ avec $\left| \begin{array}{l} a, b, d \in N \\ \alpha, ß \in Z \end{array} \right.$

- L'ensemble des multiples d'un entier naturel (N) a se note Ma = { ka / k $\in$ N } et on a :
  - 0 $\in$ Ma et a $\in$ Ma
  - a | b $\Leftrightarrow$ Mb $\subset$ Ma
  - Ma = Mb $\Leftrightarrow$ a = b

NOMBRE PREMIERS

- Un nombre p est premier lorsqu'il ne possède que deux diviseurs : 1 et lui-même. C'est à dire que Dp = {1, p}.

- L'ensemble des nombres premiers P est infini.

Soit n un entier naturel :

- Tout n autre que 1 possède au moins un diviseur premier.

- Tout n, non premier et autre que 0 et 1, possède au moins un diviseur premier p tel que p² $\leq$ n.

- Tout n autre que 0 et 1 se décompose de façon unique sous la forme $n = p_1^{\alpha_1} . p_2^{\alpha_2} . … . p_m^{\alpha_m}$ avec :
  - $p_1 < p_2 < … < p_m$
  - $p_1, p_2, …, p_m$ sont des nombres premiers
  - $\alpha_1, \alpha_2, …, \alpha_m$ sont des entiers naturels

DIVISION EUCLIDIENNE

Soit a $\in$ N et b $\in$ N*, il existe un couple unique (q, r) d'entiers naturels tel que a = bq + r avec 0 $\leq$ r < b.

- b | a $\Rightarrow$ a = bq et r = 0
- r $\neq$ 0 $\Rightarrow$ bq < a < b(q+1)

- SYSTEMES DE NUMERATION -

$\overline{10110110}^{2} = 1*2^7 + 0*2^6 + 1*2^5 + 1*2^4 + 0*2^3 + 1*2^2 + 1*2^1 + 0*2^0$

$\overline{10110110}^{2} = 128 + 32 + 16 + 4 + 2 = \overline{182}^{10}$

- Pour convertir un nombre du système décimal en une autre base, on fait plusieurs divisions euclidiennes successives jusqu'à ce que le quotient soit égale à 0.

- CONGRUENCES -

Soit deux entiers relatifs a, b et un entier naturel $n \neq 1$.

a est congru b modulo n lorsque a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n. On note $a \equiv b\ [n]$

- $a \equiv b\ [n] \Leftrightarrow n \mid (a-b)$
- $a \equiv b\ [n]$ et $b \equiv c\ [n] \Rightarrow a \equiv c\ [n]$
- $a \equiv b\ [n]$ et $a' \equiv b'\ [n] \Rightarrow \left| \begin{array}{ll} a + a' \equiv b + b' & [n] \\ aa' \equiv bb' & [n] \end{array} \right.$
- $a \equiv b\ [n]$ et $c \in Z \Rightarrow ac \equiv bc\ [n]$
- $a \equiv b\ [n]$ et $p \in N \Rightarrow a^p \equiv b^p\ [n]$
- $a \equiv r\ [n]$ et $0 \leq r < n \Leftrightarrow$ r est le reste de $\frac{a}{n}$

- PGCD ET PPCM -

ALGORITHME D'EUCLIDE

Soit a et b deux entiers naturels non nuls avec a > b, et r le reste de la division euclidienne de a par b :

- si a est multiple de b, alors r = 0 et l'ensemble des diviseurs communs de a et de b est égal à Db.
- si $r \neq 0$, alors l'ensemble des diviseurs communs de a et de b est égal à l'ensemble des diviseurs communs de b et de r.

$a = b.q_1 + r_1$	$r_1 < b$	$Da \cap Db = Db \cap Dr_1$
$b = r_1.q_2 + r_2$	$r_2 < r_1$	$Db \cap Dr_1 = Dr_1 \cap Dr_2$
$r_1 = r_2.q_3 + r_3$	$r_3 < r_2$	$Dr_1 \cap Dr_2 = Dr_2 \cap Dr_3$
…		…
$r_{n-2} = r_{n-1}.q_n + r_n$	$r_n < r_{n-1}$	$Dr_{n-2} \cap Dr_{n-1} = Dr_{n-1} \cap Dr_n$
$r_{n-1} = r_n.q_{n+1} + 0$	$0 < r_n$	$Dr_{n-1} \cap Dr_n = Dr_n$

Les divisions successives de a par b, b par r_1, r_1 par r_2, …, jusqu'au dernier reste non nul r_n est appelé Algorithme d'Euclide. La suite (r_n) est strictement décroissante.

- L'ensemble des diviseurs communs de a et de b est égal à l'ensemble des diviseurs du dernier reste non nul. On peut écrire l'égalité suivante : $Da \cap Db = Dr_n$

	q_1	q_2	q_3	q_4
a	q	r_1	r_2	r_3
r_1	r_2	r_3 = PGCD	$r_4 = 0$	

PGCD

Soit a et b deux entiers naturels non nuls, on appelle PGCD (a, b) le nombre d vérifiant les propriétés :

- d divise a et b
- si un nombre d divise a et b, alors d $\leq$ d

- Si b divise a, alors PGCD (a, b) = b
- Il existe deux entiers relatifs u et v tels que au + bv = d
- L'ensemble des diviseurs communs de a et de b est égal à l'ensemble des diviseurs de leur PGCD.

- a, b, k $\in$ N* $\Rightarrow$ PGCD (ka, kb) = k PGCD (a, b)
- k | a et k | b $\Rightarrow$ PGCD $\left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}\right) = \frac{1}{k}$ PGCD (a, b)
- PGCD (a, b) = PGCD (a + kb, b) avec $\begin{cases} k \in Z \\ a + kb > 0 \end{cases}$

NOMBRES PREMIERS ENTRE EUX

- PGCD (a, b) = 1 $\Leftrightarrow$ a et b sont premiers entre eux
- PGCD (a, b) = d $\Leftrightarrow$ $\frac{a}{d}$ et $\frac{b}{d}$ sont premiers entre eux

Bézout : a et b sont premiers entre si et seulement s'il existe deux nombres relatifs u et v tels que au + bv = 1

Gauss : si a et b sont premiers entre eux et si a divise bc alors a divise c. Conséquence : si un nombre naturel est divisible par deux nombres premiers entre eux alors il est divisible par leur produit.

PGCD (a, b) = d et PGCD (a, c) = 1 $\Rightarrow$ PGCD (a, bc) = d

PPCM

Soit a et b deux entiers naturels non nuls, on appelle PPCM (a, b) le nombre non nul m vérifiant les propriétés :

- a et b divisent m
- si a et b divisent un nombre m, alors m $\leq$ m

- Si a divise b, alors PPCM (a, b) = b
- L'ensemble des multiples communs de a et de b est égal à l'ensemble des multiples de leur PPCM.

- Si a, b, k $\in$ N* $\Rightarrow$ PPCM (ka, kb) = k PPCM (a, b)
- k | a et k | b $\Rightarrow$ PPCM $\left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}\right) = \frac{1}{k}$ PPCM (a, b)

- PGCD (a, b) * PPCM (a, b) = a * b (a, b $\in$ N*)

METHODES

- Pour obtenir une fraction irréductible, on divise le numérateur et le dénominateur par leur PGCD.
- Pour calculer sur deux fractions, on choisit comme dénominateur commun le PPCM de leur dénominateurs.

  - Décomposer a et b en facteurs premiers.
  - Le PGCD est le produit des facteurs premiers communs, chaque facteur premier commun étant affecté du plus petit des deux exposants.
  - Le PPCM est le produit des tous les facteurs premiers, chaque facteur premier étant affecté du plus grand des deux exposants.

- ISOMETRIES DU PLAN -

GENERALITES

- Une isométrie est une bijection du plan qui conserve les distances.
- Les isométries conservent le parallélisme, l'orthogonalité et les angles non orientés.
- La composée de deux isométries est une isométrie. La réciproque d'une isométrie est une isométrie.

DEPLACEMENT

- Un déplacement est une isométrie qui conserve les angles orientés (ex : translation, rotation, identité).
- La réciproque d'un déplacement est un déplacement.

ANTIDEPLACEMENT

- Un antidéplacement est une isométrie qui transforme un angle orienté en son opposé (ex : réflexion).
- La réciproque d'un antidéplacement est un antidéplacement.

PROPRIETES

- Toute isométrie est soit un déplacement soit un antidéplacement.
- Une isométrie fixant trois points non alignés est une identité du plan.
- Une isométrie distincte de l'identité du plan, fixant 2 points A et B est un réflexion d'axe (AB).
- Une isométrie ne fixant qu'un seul point O est une rotation de centre O.

- COMPOSITION D'ISOMETRIES -

COMPOSITION DE DEUX DEPLACEMENTS

- La composée de 2 déplacements est un déplacement.
- La composée de deux translations est une translation de vecteur la somme des vecteurs.
- La composée d'une translation et d'une rotation est une rotation de même angle.
- La composé de deux rotations d'angle s et s' est :
  - une rotation d'angle $s + s'$ si $s + s' \neq 0[2p]$
  - une translation si $s + s' = 0[2p]$

COMPOSITION DE DEUX ANTIDEPLACEMENTS

- La composée de 2 antidéplacements est un déplacement.

- Soient deux réflexions s_{D_1} et s_{D_2} :
  - si D_1 et D_2 sont parallèles avec $t_{\vec{u}}(D_1) = D_2$, alors $s_2 \circ s_1$ est la translation de vecteur $2\vec{u}$
  - si D_1 et D_2 sont sécantes en O, alors $s_2 \circ s_1$ est la rotation de centre O et d'angle $2(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ avec $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ des vecteurs directeurs de D_1 et D_2

- Toute translation est la composé, d'une infinité de manières, de deux réflexions d'axes parallèles.

- Toute rotation de centre O est la composé, d'une infinité de manières, de deux réflexions d'axes sécants en O.

COMPOSITION D'UN DEPLACEMENT ET D'UN ANTI

- La composé d'un déplacement et d'un antidéplacement est un antidéplacement.

- La composé d'une translation de vecteur $\vec{u}$ et d'une réflexion d'axe D est :
  - une réflexion d'axe parallèle à D si $\vec{u}$ est normal à D
  - la composé d'une réflexion d'axe parrallèle à D et d'une translation dont le vecteur est directeur de D si $\vec{u}$ n'est pas normal a D

- ISOMETRIES ET PLAN COMPLEXE -

ECRITURE COMPLEXE D'UN DEPLACEMENT

L'écriture complexe d'un déplacement est de la forme :

$$z' = e^{is} z + b$$

- $s = 0[2p]$

  La translation de vecteur d'affixe b :

  $$z' = z + b$$

- $s \neq 0[2p]$

  La rotation de centre Ω d'affixe $z_0 = \dfrac{b}{1-e^{is}}$ et d'angle s :

  $$z' - z_0 = e^{is}(z - z_0) \Leftrightarrow z' = e^{is} z - e^{is} z_0 + z_0 \Leftrightarrow z' = e^{is} z + b$$

ECRITURE COMPLEXE D'UN ANTIDEPLACEMENT

L'écriture complexe d'un antidéplacement est de la forme :

$$z' = e^{is} \bar{z} + b$$

- $e^{is} \bar{b} + b = 0$

  La réflexion d'axe passant par le point d'affixe z_0, et de vecteur directeur d'affixe ayant pour argument $s/2\,[2p]$:

  $$z' - z_0 = e^{is}(\bar{z} - \overline{z_0}) \Leftrightarrow z' = e^{is} \bar{z} - e^{is} \overline{z_0} + z_0 \Leftrightarrow z' = e^{is} \bar{z} + b$$

- $e^{is} \bar{b} + b \neq 0$

  La composé d'une translation et d'une réflexion.

- HOMOTHETIES ET SIMILITUDES -

HOMOTHETIE

- Une homothétie de centre O et de rapport k un nombre réel non nul est une transformation qui a tout point M du plan, associe le point image M' tel que $\vec{OM'} = k\vec{OM}$.

- La réciproque de l'homothétie h de centre O et de rapport k est l'homothétie $h^{-1}\left(O, \frac{1}{k}\right)$.

SIMILITUDE DIRECTE FIXANT UN POINT O

- Une similitude directe de centre O, de rapport k et d'angle s est la composée commutative d'une homothétie de centre O et de rapport k>0, et d'une rotation de centre 0 et d'angle s .

$$\begin{cases} OM' = kOM \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = s\,[2p] \end{cases}$$

- La similitude directe, comme l'homothétie, multiplie :
  - les distances par k
  - les aires par k²

- La similitude directe, comme l'homothétie, conserve :
  - les angles orientés
  - les contacts
  - les barycentres

- La réciproque d'une similitude directe est une similitude directe de rapport l'inverse et d'angle l'opposé.

AUTRES COMPOSITIONS

- La composé d'une translation et d'une homothétie est une homothétie de même rapport.

- La composé de deux homothéties de rapport k et k' est :
  - une homothétie de rapport kk' si $kk' \neq 1$
  - une translation si $kk' = 1$

- La composé de deux similitudes directes de même centre est une similitude directe de rapport le produit des rapports et d'angle la somme des angles.

$$s_2(\Omega, k_2, s_2) \circ s_1(\Omega, k_1, s_1) = s(\Omega, k_1k_2, \Omega_1 + \Omega_2)$$

ECRITURE COMPLEXE

- L'écriture complexe d'une homothétie de rapport k$\neq$1 et de centre le point d'affixe $\frac{b}{1-k}$ est de la forme :

$$z' = kz + b$$

- La similitude directe de centre d'affixe z_0, de rapport $k > 0$ et d'angle s :

$$z' - z_0 = ke^{is}(z - z_0) \Leftrightarrow z' = ke^{is}z - ke^{is}z_0 + z_0 \Leftrightarrow z' = az + b$$

A mettre quelque part…

- Soit f, g et h trois applications quelconques :
  - $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ (associativité)
  - $(g \circ f)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$